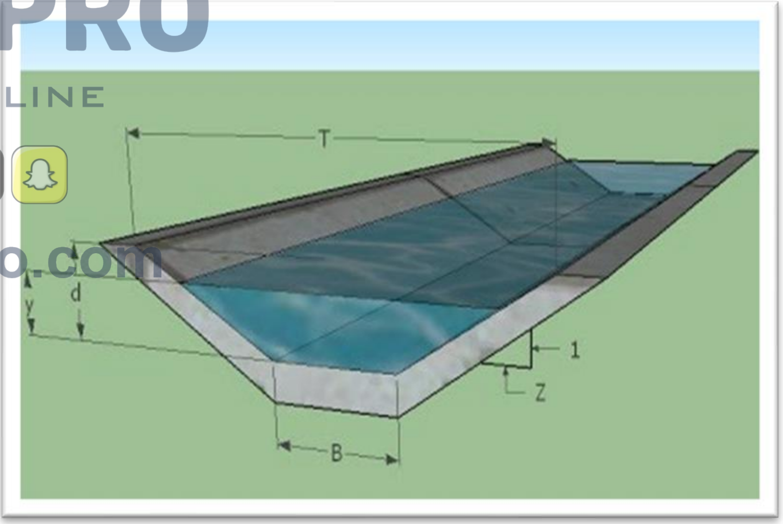
UNIVERSIDAD NACIONAL DE HUANCAVELICA
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERIA CIVIL - HUANCAVELICA

CURSO: MECÁNICA DE FLUIDOS II

UNIDAD III

Energía específica y Flujo crítico.

SEMANA 13



TEMAS :

- Energía específica.
- Flujo crítico.

Docente: Ing. David Requena Machuca

INTRODUCCION

Los conceptos relacionados con Energía Específica son sumamente importantes, pues no solamente permiten definir el llamado **"tirante crítico"**, y con ello la posibilidad de **identificar flujos de naturaleza subcrítica o supercrítica**, sino que además, los conceptos revisados en esta sección permiten dar respuesta a diversos casos prácticos que, de otro modo, difícilmente podrían ser resueltos, como son los asociados a la presencia de gradas o cambios de la rasante del canal; la existencia de angostamientos o ensanchamientos de la sección.

13.- Energia específica.

La energía específica en la sección de un canal se define como la energía por kilogramo de agua que fluye a través de la sección, medida con respecto al fondo del canal (Villón, 2007).

La energía específica en una sección de canal se define como la energía de agua en cualquier sección de un canal medida con respecto al fondo de este.

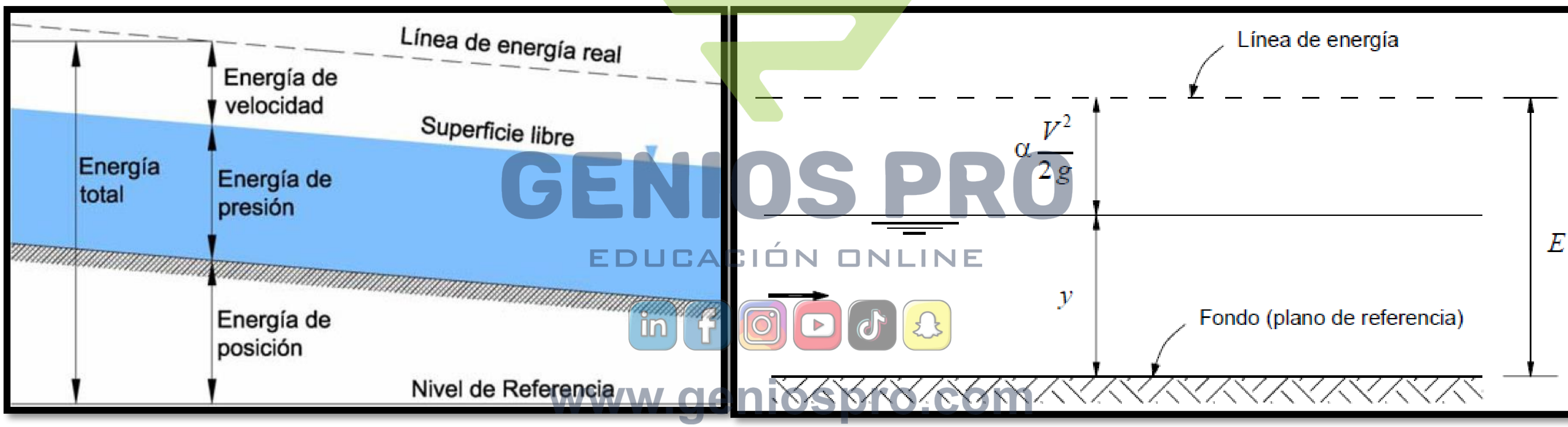
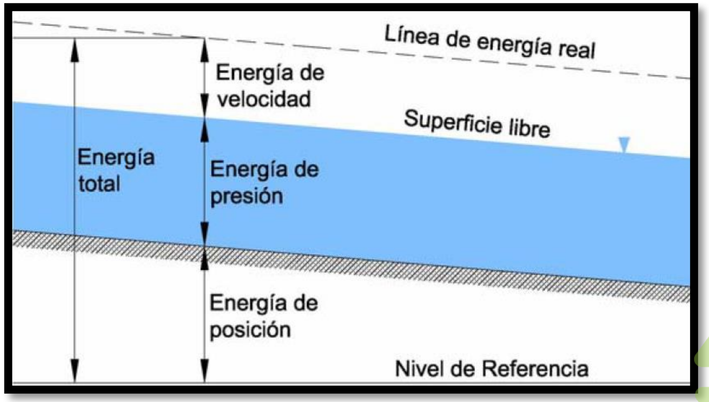
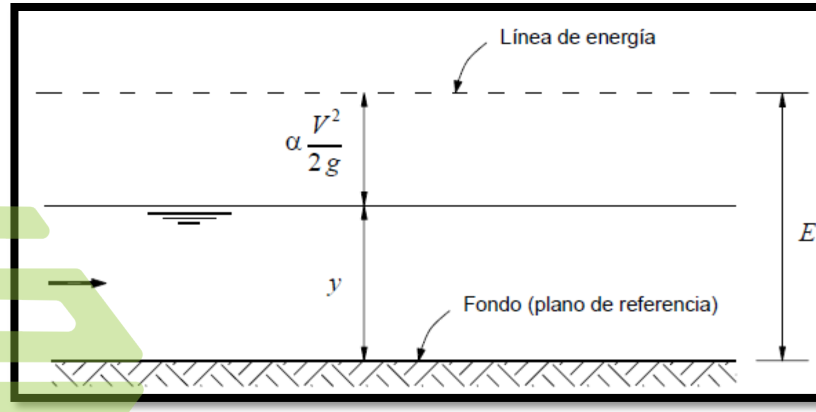


Figura 01: Energía especifica en un canal, consideraciones.

La energía total de una porción de agua viajando sobre una línea de corriente esta dada por la ecuación de Bernoulli

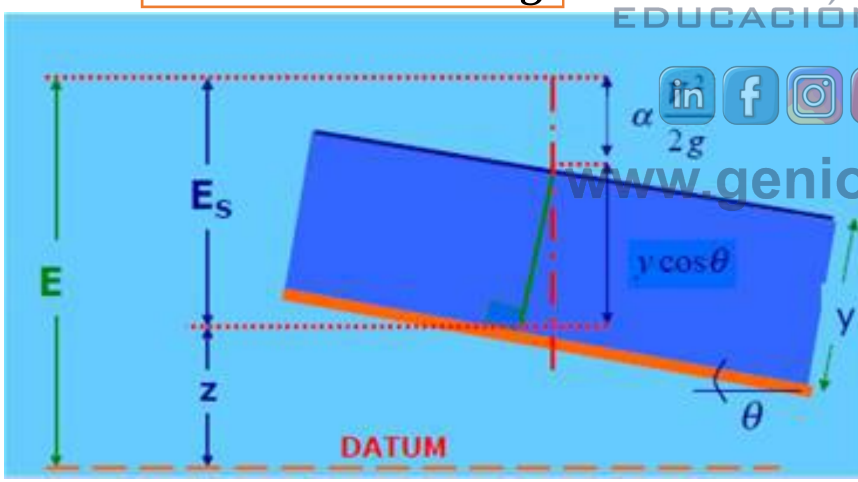




Donde z=0 (ya que el nivel de referencia es el fondo del canal) obteniéndose la ecuación de la energía especifica.

$$E = Z + y + \alpha \frac{v^2}{2g}$$

$$Es = y + \alpha \frac{v^2}{2g}$$



Considerando α=1

$$Es = y + \frac{v^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Recordando la ecuación de continuidad, para un canal.

$$v = \frac{Q}{A} \;\dots\dots\dots (2)$$

Sustituyendo la ecuación de continuidad en la ecuación 1.

$$Es = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \;\dots\dots\dots (3)$$

A=f(y).

Puede verse que, para una sección de canal y caudal **Q** determinados, la **energía específica** en una sección de canal, sólo es función de la profundidad de flujo.

$$Si\ y \to 0 \Rightarrow A \to 0, luego: \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot A^2} \to \infty \Rightarrow E \to \infty$$

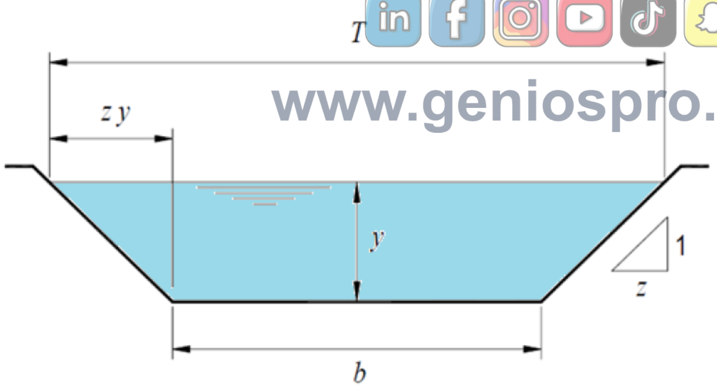
$$Si\ y \to \infty \Rightarrow A \to \infty, luego: \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot A^2} \to 0 \Rightarrow E \to \infty$$

Como la ecuación de energía especifica es función del tirante y las características geométricas de canal **se puede tabular valores E con Y obteniéndose la conocida curva de energía especifica.**

EJEMPLO DE CALCULO DE LA ENERGIA ESPECIFICA

Consideremos una sección de trapezoidal de:

b	0.75	m
Z	1	
Q	0.4	m3/s



Recordando la ecuación del área en función del talud y tirante

A : $by + Zy^2$

$$A = 0.75 * y + 1 * y^2$$

$$A = y^2 + 0.75y$$

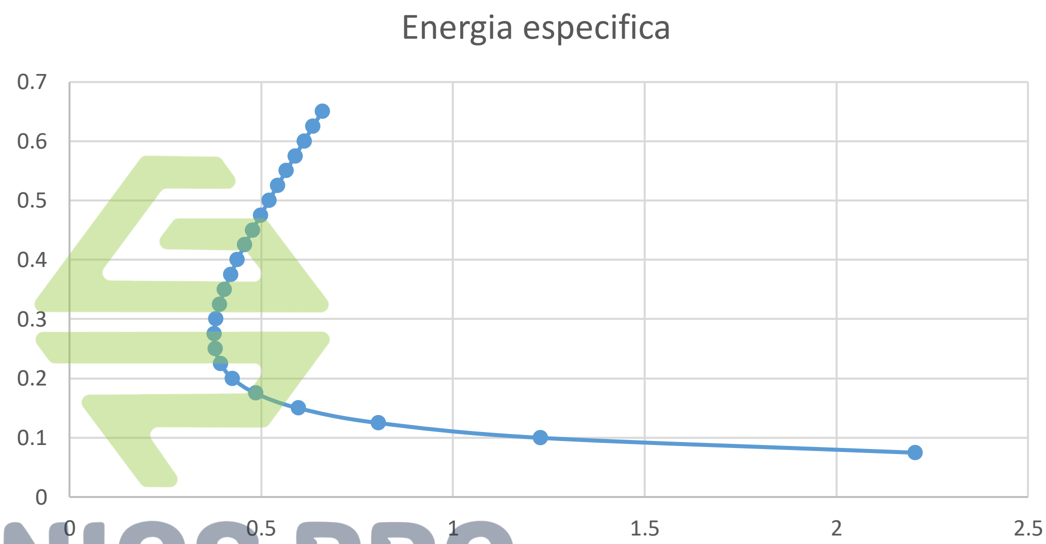
Sustituyendo el área en la ecuación de la energía especifica

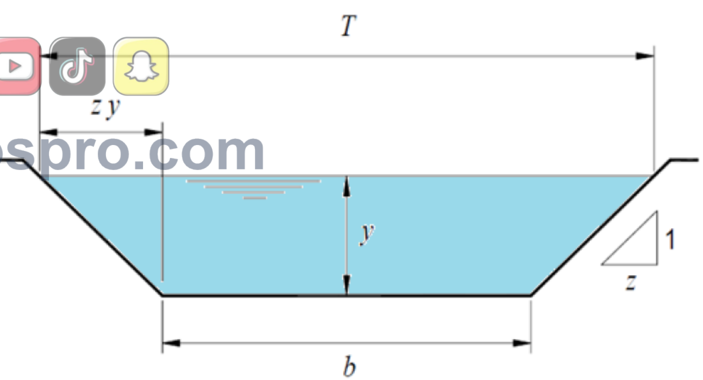
$$\boxed{Es = y + \frac{Q^2}{2gA^2}}$$

$$\boxed{Es = y + \frac{Q^2}{2g(y^2 + 0.75y)^2}}$$

Crear un cuadro de valores tabulados para el ejercicio:

y	A	Es
0.075	0.061875	2.205922594
0.1	0.085	1.22917238
0.125	0.109375	0.806964811
0.15	0.135	0.597641725
0.175	0.161875	0.486342591
0.2	0.19	0.425990871
0.225	0.219375	0.394521127
0.25	0.25	0.380532327
0.275	0.281875	0.377679792
0.3	0.315	0.382219909
0.325	0.349375	0.391836615
0.35	0.385	0.405039774
0.375	0.421875	0.420838513
0.4	0.46	0.438555153
0.425	0.499375	0.457714818
0.45	0.54	0.477977608
0.475	0.581875	0.499095653
0.5	0.625	0.520885172
0.525	0.669375	0.543207869
0.55	0.715	0.565958278
0.575	0.761875	0.589054994
0.6	0.81	0.612434492
0.625	0.859375	0.636046703
0.65	0.91	0.659851794





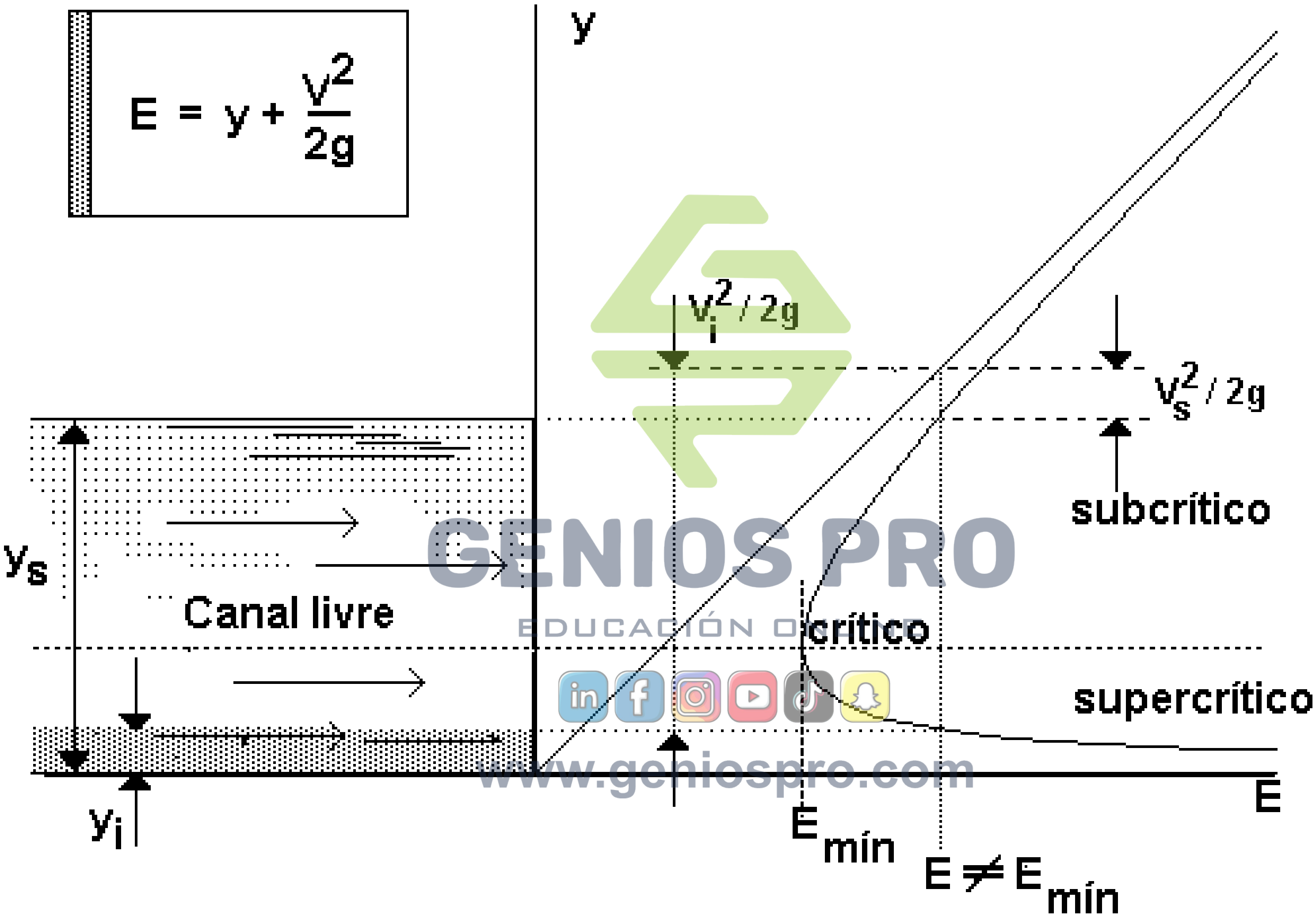


Figura 01: Grafica de la Energía especifica en un canal.

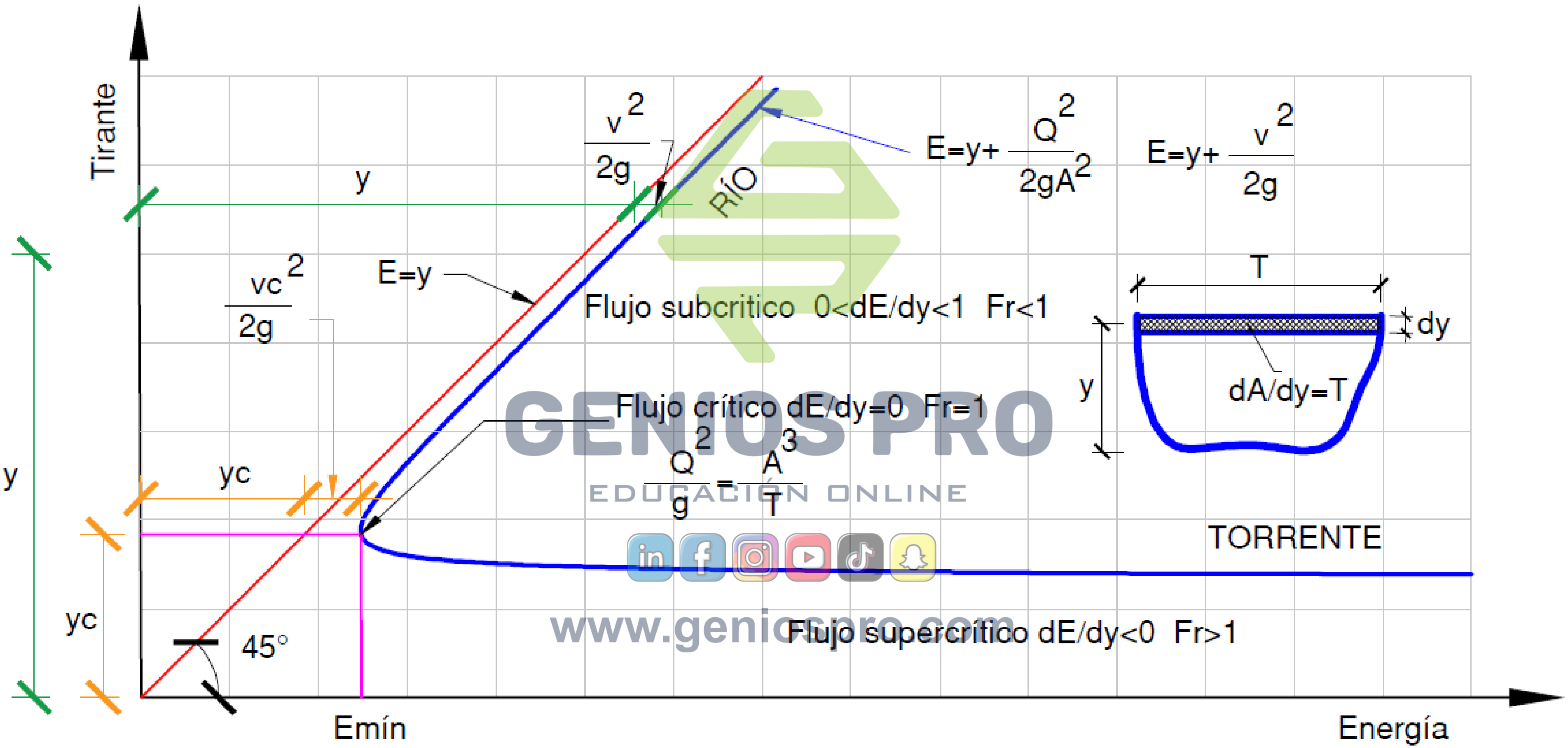


Figura 01: Grafica de la Energía especifica en un canal.
Fuente: ing ROBERT M.

Existe la mínima energía especifica **Emin** para un **Y** las coordenadas de este punto puede ser encontradas tomando la primera derivada de la ecuación 3 con respecto al tirante e igualando el resultado a cero se determina la ecuación general del flujo critico

$$Es = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \ldots (3)$$

$$\frac{dE}{dy} = 0$$

Derivando la ecuación con respecto al tirante.

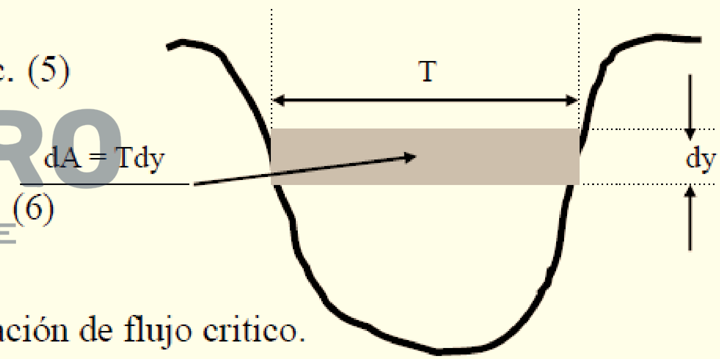
$$\frac{dE}{dy} = \frac{d}{dy}\left(y - \frac{Q^2}{2gA^2}\right) = 0$$

$$1 - 2\frac{Q^2}{2gA^3}\frac{dA}{dy} = 0 \ldots\ldots (4)$$

El diferencial del área mojada dA cerca de la superficie libre es igual a Tdy.

$$\frac{dA}{dy} = T \quad \text{Reemplazando en la ec. (5)}$$

$$1 - \frac{Q^2}{A^3 g}.T = 0 \qquad (6)$$



Finalmente encontramos la ecuación de flujo critico.

$$\frac{Q^2 T}{A^3 g} = 1 \qquad (7)$$

$$\frac{Q^2 T}{A^3 g} = 1$$

13.2.- Régimen crítico

El estado crítico de flujo ha sido definido como la condición para la cual el **número de Froude es igual a la unidad F= 1.** Es el estado de flujo para el cual la energía específica es mínima para un caudal determinado.

El estado crítico del flujo través de una sección del canal se caracteriza por:

1.- Posee la energía especifica mínima para un caudal dado.
2.- Posee el caudal máximo para una energía especifica dada.
3.- Posee la fuerza especifica mínima para un caudal dado.
4.- El número de Froude es igual a la unidad.

La energía crítica es la energía mínima que puede tener la lámina de agua para ser capaz de transportar el caudal de origen.

Para poder clasificar al flujo critico, subcritico y supercrítico son.

a) Por medio de los tirantes:

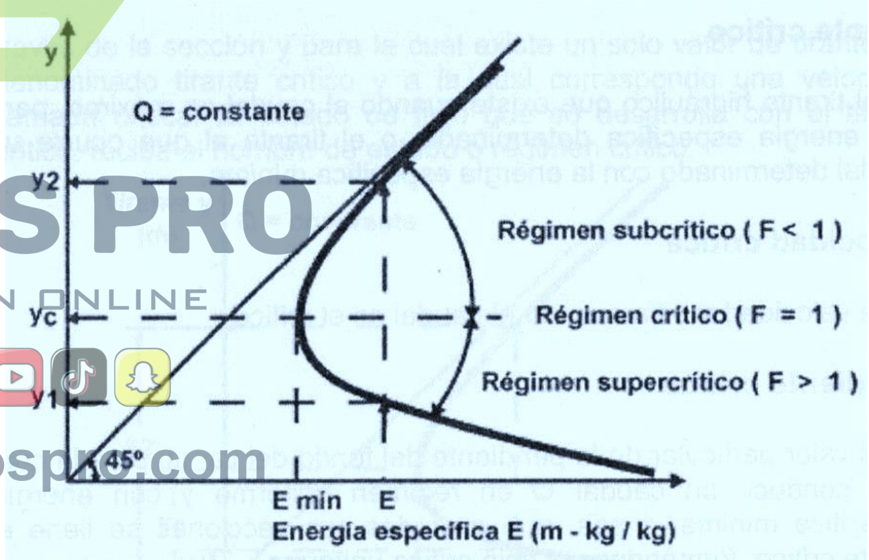
si y<yc flujo supercrítico o rápido.
si y=yc flujo crítico.
si y>yc flujo subcrítico o lento

b) Por medio de la pendiente de fondo (Sf):

si Sf>Sc flujo supercrítico o rápido.
si Sf=Sc flujo crítico.
si Sf<Sc flujo subcrítico o lento

c) Por medio del número de Froude:

si F<1 flujo supercrítico o rápido.
si F=1 flujo crítico.
si F>1 flujo subcrítico o lento



d) Por medio de las velocidades medias:

si V>Vc flujo supercrítico o rápido.
si V=Vc flujo crítico.
si V<Vc flujo subcrítico o lento

Ecuaciones del régimen crítico

Recordemos la ecuación del flujo critico.

$$\frac{Q^2 T}{A^3 g} = 1$$

Despejando los valores constantes y valores en función del tirante.

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c}$$

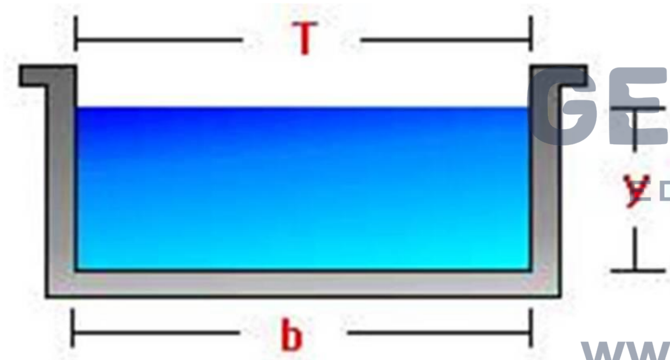
Como A y T están en función de la función de "y", la ecuación anterior impone las condiciones del flujo critico en un canal de cualquier forma y permite calcular el tirante critico.

Relaciones entre los parámetros para un régimen crítico

Las condiciones teóricas en que se desarrolla el régimen crítico están dadas por la ecuación :

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c}$$

❖ Sección Rectangular:



A : b*y T : b

1) Relación entre el tirante crítico y el caudal unitario:

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{(by)^3}{b} \qquad y_c^3 = \frac{Q^2}{b^2 g} \qquad y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}}$$

Se define le relación de Q/b como "caudal unitario" o caudal por unidad de ancho, luego:

$$\boldsymbol{y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}}$$

2) Relación entre la velocidad y el tirante crítico:

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c}$$

$$\frac{v_c^2 * A_c^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c}$$

$$\frac{v_c^2}{g} = \frac{A_c}{T_c}$$

$$\frac{v_c^2}{g} = \frac{by_c}{b}$$

$$v_c = \sqrt{gy_c}$$

$$Q = v * A$$

3) Relación entre la energía específica mínima y el tirante crítico:

$$E = y + \frac{v^2}{2g}$$

$$E_{min} = y_c + \frac{v_c^2}{2g}$$

$$\frac{v_c^2}{g} = y_c$$

$$E_{min} = y_c + \frac{y_c}{2}$$

$$E_{min} = \frac{3}{2} y_c$$

4) Número de Froude:

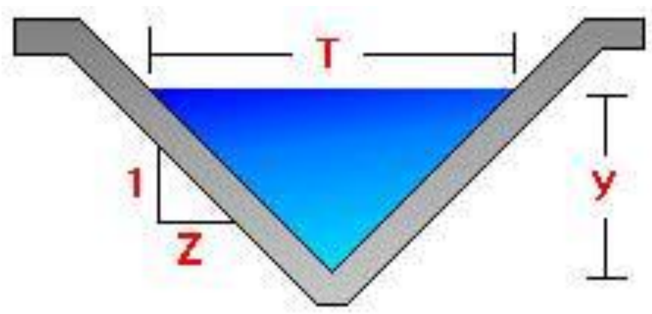
$$F = \frac{v}{\sqrt{gD}}$$

$$D = \frac{A}{T}$$

$$D = \frac{by}{b} = y$$

$$\frac{v_c}{\sqrt{gy_c}} = 1$$

❖ Sección Triangular:



A : Zy^2 T : 2Zy

1) Relación entre el tirante crítico y el caudal unitario:

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} \qquad \frac{Q^2}{g} = \frac{(Zy_c^2)^3}{2Zy_c} \qquad \frac{Q^2}{g} = \frac{Z^2y_c^5}{2}$$

$$y_c^5 = \frac{2Q^2}{gZ^2}$$

$$y_c = \sqrt[5]{\frac{2Q^2}{gZ^2}}$$

2) Relación entre la velocidad y el tirante crítico:

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c}$$

$$Q = v * A$$

$$\frac{v_c^2 * A_c^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} \qquad \frac{v_c^2}{g} = \frac{A_c}{T_c} \qquad \frac{v_c^2}{g} = \frac{Zy^2}{2Zy}$$

$$y_c = \frac{2v_c^2}{g}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{gy_c}{2}}$$

3) Relación entre la energía específica mínima y el tirante crítico:

$$E_{min} = y_c + \frac{v_c^2}{2g}$$

$$E = y + \frac{v^2}{2g}$$

$$E_{min} = y_c + \frac{y_c}{4}$$

$$E_{min} = \frac{5}{4} y_c$$

$$y_c = \frac{2v_c^2}{g}$$

$$\frac{y_c}{4} = \frac{v_c^2}{2g}$$

4) Número de Froude:

$$F = \frac{v}{\sqrt{gD}}$$

$$D = \frac{A}{T}$$

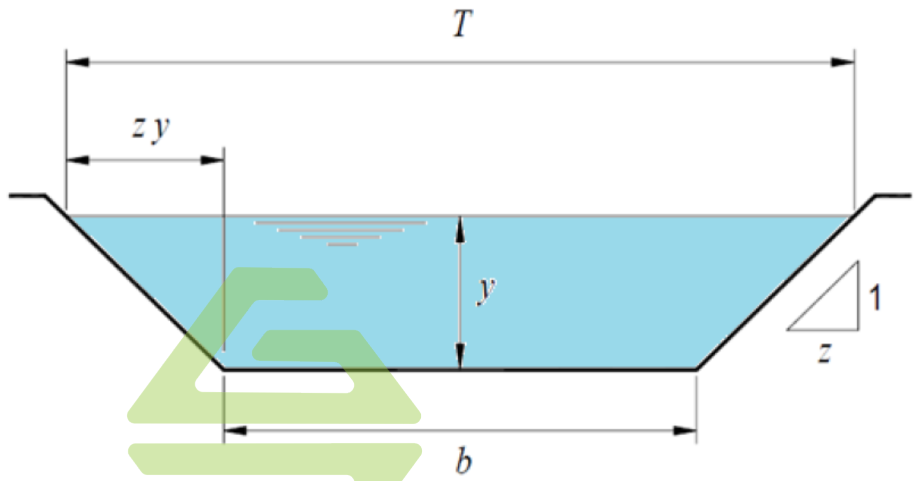
$$D = \frac{Zy^2}{2Zy} = \frac{y}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2} * v_c}{\sqrt{g y_c}} = 1$$

❖ Sección Trapezoidal:

A : $by + Zy^2$

T : $b + 2Zy$



1) Relación entre el tirante crítico y el caudal unitario:

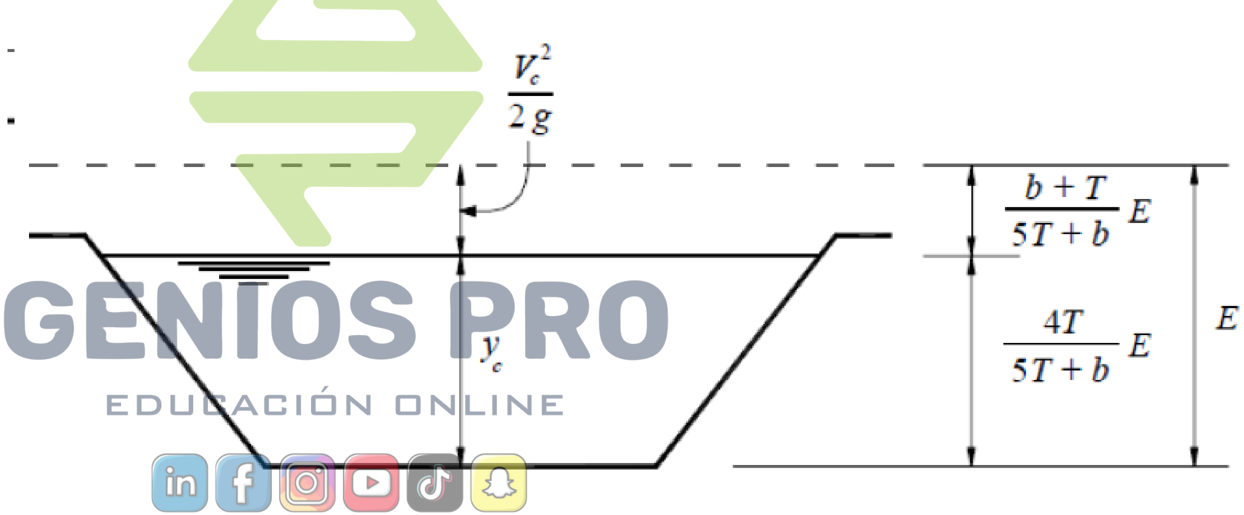
$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c}$$

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{\left(y_c(b + zy_c)\right)^3}{b + 2zy_c}$$

2) Condiciones criticas en un canal trapezoidal:

- La velocidad crítica

$$V_c = \sqrt{g\frac{(b+zy_c)y_c}{b+2zy_c}}$$



- Además:

$$y_c = \frac{4T}{5T+b}E$$

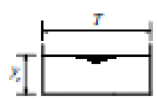
$$y_c = \frac{4zE-3b+\sqrt{16z^2E^2+16zEb+9b^2}}{10z}$$

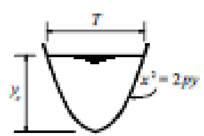
SECCIONES CRITICAS ($E = y_c + \frac{V_c^2}{2g}$)

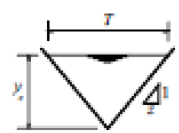
(Sistema métrico)

		RECTANGULO	PARABOLA	TRIANGULO	TRAPECIO
TIRANTE CRITICO	y_c	$\frac{2}{3}E$	$\frac{3}{4}E$	$\frac{4}{5}E$	$\frac{4T}{5T+b}E$
		$0{,}467q^{\frac{2}{3}}$	$0{,}701q^{\frac{2}{3}}$	$0{,}935q^{\frac{2}{3}}$	$0{,}467\frac{2T}{b+T}q^{\frac{2}{3}}$
			$0{,}456\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{4}}Q^{\frac{1}{2}}$	$0{,}728\left(\frac{Q}{z}\right)^{\frac{2}{5}}$	$\frac{4zE-3b+\sqrt{16z^2E^2+16zEb+9b^2}}{10z}$
ENERGIA DE VELOCIDAD	$\frac{V_c^2}{2g}$	$\frac{1}{3}E$	$\frac{1}{4}E$	$\frac{1}{5}E$	$\frac{T+b}{5T+b}E$
VELOCIDAD CRITICA	V_c	$\sqrt{gy_c}$	$0{,}816\sqrt{gy_c}$	$0{,}707\sqrt{gy_c}$	$\sqrt{\frac{T+b}{2T}}\sqrt{gy_c}$
GASTO MAXIMO	q_{max}	$1{,}704E^{\frac{3}{2}}$	$1{,}107E^{\frac{3}{2}}$	$0{,}792E^{\frac{3}{2}}$	$8{,}854\left[\frac{b+T}{5T+b}\right]^{\frac{3}{2}}E^{\frac{3}{2}}$

$$q = \frac{Q}{T}$$

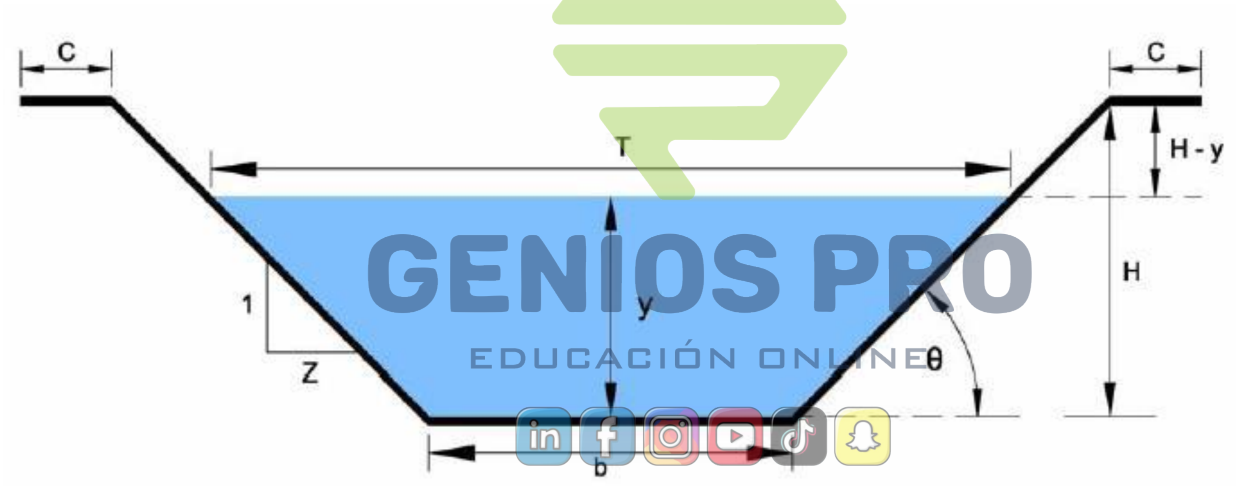






13.1.- EJERCICIOS 01

Determinar el tirante critico de un canal trapezoidal que conduce 11.32 m3/s, ancho de la base 6.0 m, talud Z= 2 y coeficiente de coriolis igual a 1.



Q=11.32 m3/s,
b=6.0 m,
Z= 2
Coeficiente de coriolis igual a 1.

SOLUCION

Recordando la ecuación del régimen critico:

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c}$$

Recordando las características geométricas del canal trapezoidal:

$$A = (b + Zy_c)y_c \qquad A = (6 + 2y_c)y_c$$

$$T = b + 2Zy_c \qquad T = 6 + 4y_c$$

Reemplazando valores en la ecuación del régimen critico:

$$\frac{11.32^2}{9.806} = \frac{(6y_c + 2y_c^2)^3}{6 + 4y_c}$$

$$13.067(6 + 4y_c) = (6y_c + 2y_c^2)^3$$

En la cual A y T son funciones del tirante "y". Para la aplicación del método de “Newton-Raphson” se requiere obtener la derivada de la función, que en este caso es:

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f(y)}{f'(y)}$$

Llevando la ecuación de régimen critico a una función f(y):

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} \qquad A_c^3 - \left(\frac{Q^2}{g}\right)T_c = 0 \qquad f(y) = A_c^3 - \left(\frac{Q^2}{g}\right)T_c$$

Derivando función f(y):

$$f'(y) = 3A_c^2\left(\frac{dA}{dy}\right) - \left(\frac{Q^2}{g}\right)\left(\frac{dT}{dy}\right)$$

Recordando las características geométricas del canal trapezoidal:

$$A = (b + Zy_c)y_c \qquad A = (6 + 2y_c)y_c \qquad \frac{dA}{dy} = 6 + 4y_c$$

$$T = b + 2Zy_c \qquad T = 6 + 4y_c \qquad \frac{dT}{dy} = 4$$

Reemplazando valores:

$$f(y) = A_c^3 - \left(\frac{Q^2}{g}\right)T_c \qquad f'(y) = 3A_c^2\left(\frac{dA}{dy}\right) - \left(\frac{Q^2}{g}\right)\left(\frac{dT}{dy}\right)$$

Tabulando los resultados: Yci = 1

$$A = (6 + 2y_c)y_c \qquad (6+2)1 = 8 \longrightarrow \frac{dA}{dy} = 6 + 4y_c \qquad 6 + 4 * 1 = 8$$

$$T = 6 + 4y_c \qquad 6 + 4 * 1 = 10 \longrightarrow \frac{dT}{dy} = 4$$

$$f(y) = A_c^3 - \left(\frac{Q^2}{g}\right)T_c \longrightarrow 8^3 - \left(\frac{11.32^2}{9.806}\right) * 10 = 381.322456$$

$$f'(y) = 3A_c^2\left(\frac{dA}{dy}\right) - \left(\frac{Q^2}{g}\right)\left(\frac{dT}{dy}\right) \longrightarrow f'(y) = 3 * 8^2(8) - \left(\frac{11.32^2}{9.806}\right)(4) = 1867.72$$

Nº	Yci	A	dA/dy	T	dt/dy	f(Yci)	f'(Yci)	Yc(i+1)	Error
1	1	8	10	10	4	381.322456	1867.72898	0.7958363	0.204

Nº	Yci	A	dA/dy	T	dt/dy	f(Yci)	f'(Yci)	Yc(i+1)	Error
1	1	8	10	10	4	381.322456	1867.72898	0.7958363	0.204
2	0.7958363	6.042	9.183	9.183	4	100.53241	953.373747	0.6903872	0.105
3	0.6903872	5.096	8.762	8.762	4	17.8135832	630.21138	0.66212115	0.028
4	0.66212115	4.85	8.648	8.648	4	1.03509329	557.914084	0.66026586	0.002
5	0.66026586	4.833	8.641	8.641	4	0.00422401	553.364566	0.66025823	8E-06
7	0.66025823								

$$y_c = 0.6603\ m$$

Calculando la velocidad critica:

$$v_c = \frac{11.32}{4.833}$$

$$v_c = 2.342\ m/s$$

- La velocidad crítica

$$\boxed{V_c = \sqrt{g\frac{(b+zy_c)y_c}{b+2zy_c}}}$$

$$v_c = 2.342\ m/s$$

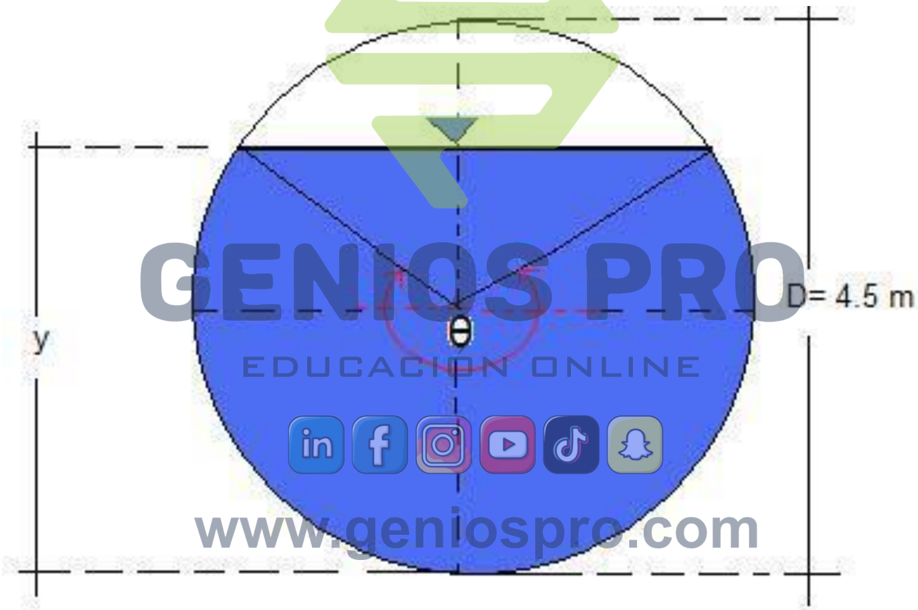
Calculando la energía mínima:

$$E_{min} = y_c + \frac{v_c^2}{2g}$$

$$E_{min} = 0.94\ m$$

13.1.- EJERCICIOS 02

Determínese la profundidad normal, la profundidad crítica y la pendiente critica, si Q= 2.8 mcs, n= 0.015, S= 0.0020 para una sección circular de 4.5 m de diámetro.



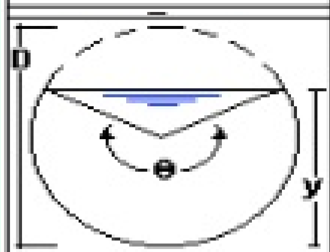
SOLUCION

Determinando la profundidad normal:

Recordando la ecuaciones de Manning:

$$Q=\frac{A.R^{2/3}.S_o^{1/2}}{n} \qquad \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}}=\frac{n.Q}{S_o^{1/2}}$$

Recordando las características geométricas de un canal circular:

Tipo de sección	Área A (m2)	Perimetro mojado P (m)	Radio hidráulico Rh (m)	Espejo de agua T (m)
 Circular	$\frac{(\theta-\text{sen}\,\theta)D^2}{8}$	$\frac{\theta D}{2}$	$\left(1-\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}\right)\frac{D}{4}$	$\left(\text{sen}\frac{\theta}{2}\right)D$ ó $2\sqrt{y(D-y)}$

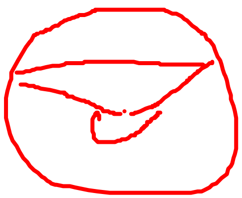
Reemplazando valores en la ecuaciones de Manning:

$$\frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} = \frac{n.Q}{S_o^{1/2}} \qquad \frac{A^5}{P^2} = \left(\frac{n.Q}{S_o^{1/2}}\right)^3$$

Q= 2.8 mcs,
n= 0.015,
S= 0.0020
D= 4.5 m.

$$\frac{\left(\frac{(\theta - sen\theta) * 4.5^2}{8}\right)^5}{\left(\theta * \frac{4.5}{2}\right)^2} = \left(\frac{0.015 * 2.8}{0.002_o^{1/2}}\right)^3$$

$$\left(\frac{(\theta - sen\theta) * 4.5^2}{8}\right)^5 = 0.8282 * 5.0625 * \theta^2$$



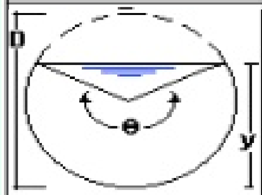
$$\frac{(\theta - sen\theta)^5}{\theta^2} = 0.0403482$$

$\boldsymbol{\theta = 1.63879}$ **radianes**

1.- Encontrando el tirante normal:

$$y = \text{sen}^2\frac{\theta}{4}(D) \qquad \text{sen}^2\frac{1.6389}{4}(4.5) \qquad 0.715\ m$$

2.- Encontrando el régimen critico:

Tipo de sección	Área A (m2)	Perímetro mojado P (m)	Radio hidráulico Rh (m)	Espejo de agua T (m)
 Circular	$\frac{(\theta-\text{sen}\theta)D^2}{8}$	$\frac{\theta D}{2}$	$(1-\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta})\frac{D}{4}$	$(\text{sen}\frac{\theta}{2})D$ ó $2\sqrt{y(D-y)}$

$$A_c = \frac{1}{8}(\theta_c - sen\theta_c)D^2 \qquad = \frac{1}{8}(\theta_c - sen\theta_c)(4.5)^2$$

$$T_c = sen\left(\frac{\theta_c}{2}\right)D \qquad = sen\left(\frac{\theta_c}{2}\right)(4.5)$$

Ecuación general de régimen critico:

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} \quad \rightarrow \quad \frac{(2.8)^2}{9.81} = \frac{\left[\frac{1}{8}(\theta_c - sen\theta_c)(4.5)^2\right]^3}{sen\left(\frac{\theta_c}{2}\right)(4.5)}$$

$$\theta_c = 1.53398\ rad$$

2.- Ecuación general de régimen critico:

$$\frac{y_c}{D} = \text{sen}^2\frac{\theta_c}{4}$$

$$y_c = (4.5)\,\text{sen}^2\frac{1.53398}{4}$$

$= 0.63\ m$

3.- Calculo de la pendiente critica:

Ecuación de Manning:

$$\frac{Qn}{\sqrt{S_c}} = \frac{A_c^{5/3}}{P_c^{2/3}}$$

$$\frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} = \frac{n.Q}{S_o^{1/2}}$$

$$A_c = \frac{1}{8}(\theta_c - sen\theta_c)D^2$$

$$A_c = \frac{1}{8}(1.53398 - sen1.53398)(4.5)^2$$

$= 1.35\ m^2$

$$\frac{\theta D}{2}$$

$$\frac{1.53398 * 4.5}{2}$$

$= 3.45\ m$

Reemplazando valores:

$$\frac{Qn}{\sqrt{S_c}} = \frac{A_c^{5/3}}{P_c^{2/3}} \rightarrow$$

$$\frac{2.8 * 0.015}{\sqrt{S_C}} = \frac{1.35^{5/3}}{3.45^{5/3}}$$

$S_c = 0.00338$

...GRACIAS